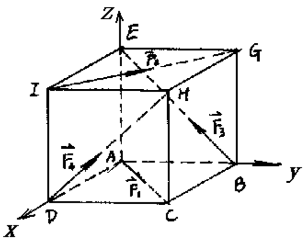
第二章　力系的简化　　习题解答

2-3 在立方体的顶点A、I、B、D上分别作用四个力，大小均为F，其中$\boldsymbol{F}_1$沿AC，$\boldsymbol{F}_2$沿IG，$\boldsymbol{F}_3$沿BE，$\boldsymbol{F}_4$沿DH。试将此力系简化成最简形式。



解： 各力均在与坐标平面平行的面内，且与所在平面的棱边成45° 角。将力系向A点简化，主矢$\boldsymbol{F}_R'$在坐标轴上的投影为

$$F_{Rx}' = F_1\cos 45^\circ - F_2\cos 45^{\circ\circ} = 0\,,$$

$$F_{Ry}' = F_1\cos 45^\circ + F_2\cos 45^{\circ\circ} - F_3\cos 45^\circ + F_4\cos 45^\circ = \sqrt{2}F\,,$$

$$F_{Rz}' = F_3\cos 45^\circ + F_4\cos 45^\circ = \sqrt{2}F\text{。}$$

用解析式表示为：　$\boldsymbol{F}_R' = \sqrt{2}F(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

设立方体的边长为a，主矩$\boldsymbol{M}_A$在坐标轴上的投影为

$$M_{Ax} = -F_2\cos 45^\circ\cdot a + F_3\cos 45^\circ\cdot a = 0\,,$$

$$M_{Ay} = -F_2\cos 45^\circ\cdot a - F_4\cos 45^\circ\cdot a = -\sqrt{2}Fa\,,$$

$$M_{Az} = F_2\cos 45^\circ\cdot a + F_4\cos 45^\circ\cdot a = \sqrt{2}Fa\text{。}$$

用解析式表示为：$\boldsymbol{M}_A = \sqrt{2}Fa(-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$。因为，$\boldsymbol{F}_R'\cdot\boldsymbol{M}_A = 0$，所以，主矢和主矩可以进一步简化为一个力，即力系的合力。合力的大小和方向与主矢相同，$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_R'$；合力作用点的矢径为

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{F}_R'\times\boldsymbol{M}}{(F_R')^2} = a\boldsymbol{i}\,,$$

所以，合力大小为$2F$，方向沿对角线DH。

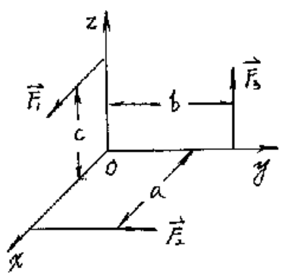
2-4 三力$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$分别在三个坐标平面内，并分别与三坐标轴平行，但指向可正可负。距离a,b,c为已知。问：这三个力的大小满足什么关系时力系能简化为合力？又满足什么关系时能简化为力螺旋？

解： 这力系的主矢为

$$F_R' = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}\;;$$

对O点的主矩为

$$M_O = F_3 b\boldsymbol{i} + F_1 c\boldsymbol{j} + F_2 a\boldsymbol{k}\text{。}$$



当主矢与主矩垂直时，力系能简化为合力。即从 $\boldsymbol{F}_R'\cdot\boldsymbol{M}_O = 0$ 得

$$F_1F_3b+F_2F_1c+F_3F_2a=0,$$

题 2.4 图

简化为

$$\frac{a}{F_1}+\frac{b}{F_2}+\frac{c}{F_3}=0。$$

当主矢与主矩平行时，力系能简化为力螺旋，即从$\boldsymbol{F}_R'\times\boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{0}$ 得

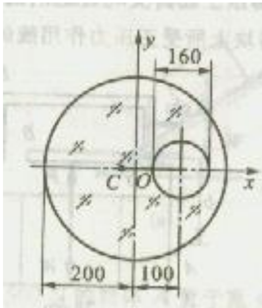
$$\frac{F_1}{bF_3}=\frac{F_2}{cF_1}=\frac{F_3}{aF_2}。$$

2-10 计算图示平面图形的形心坐标。

解: 由对称性知，该图形的形心一定在 x 轴上，即 $y_c=0$。用负面积法计算其横坐标。此平面图形由 2 个圆组成，其面积和的形心坐标为

$$A_1=\pi\times200^2\ (\mathrm{mm}^2),\quad x_1=0\ (\mathrm{m}),$$

$$A_2=-\pi\times80^2\ (\mathrm{mm}^2),\quad x_2=100\ (\mathrm{m})。$$



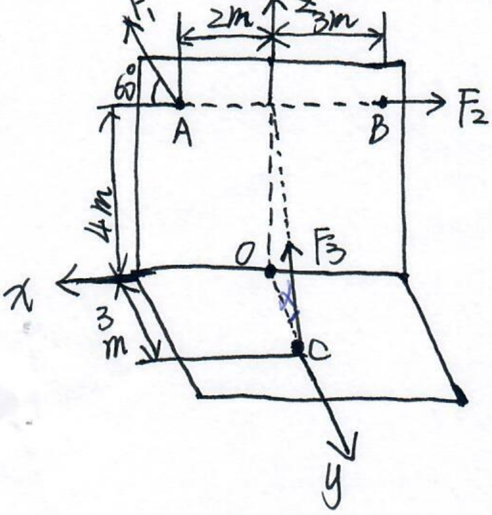
题 2-10 图

按形心计算公式，有

$$x_c=\frac{\sum_i A_i x_i}{\sum_i A_i}=\frac{\pi\times200^2\times0+(-\pi\times80^2)\times100}{\pi\times200^2+(-\pi\times80^2)}$$

$$=-19.05(\mathrm{mm})$$

2-5、已知力 $F_1=400\,N$，$F_2=300\,N$，$F_3=500\,N$，其作用点和方向如图所示，试将力系 F_1，F_2，F_3 向O点简化。



解：$F_{Rx}=F_1\cdot\cos60^\circ-F_2=400\times\frac{1}{2}-300=-100N$

$F_{Ry}=-F_3\cos\alpha=-500\times\frac{3}{5}=-300\,N$

$F_{Rz}=F_1\sin60^\circ+F_3\sin\alpha=400\times\frac{\sqrt{3}}{2}+500\times\frac{4}{5}=200\sqrt{3}+400=746.4\,N$

$\therefore\ \vec{F}_R=-100\vec{i}-300\vec{j}+746.4\vec{k}$

$M_{Ox}=F_3\cdot\sin\alpha\times3=500\times\frac{4}{5}\times3=1200\,N\cdot m$

$M_{Oy}=F_1\cos60^\circ\times4-F_1\cdot\sin60^\circ\times2-F_2\times\cancel{}4=-400\sqrt{3}-400=-400(1+\sqrt{3})\,N\cdot m$

$M_{Oz}=0$

$\therefore\ M_O=1200\vec{i}-400(1+\sqrt{3})\vec{j}$

2-13. 构架由五根杆组成，每一根杆的长度 $l=4m$，夹角 $\beta=60^\circ$，质量为 $7kg/m$。如果接头处加力板的质量和厚度都忽略不计。为使起吊时构架不旋转，试确定图示起重机绳索的位置 d。

解：~~由于重力沿y轴方向，要使得力矩平衡，则~~

由力矩平衡可知，绳索位置 d 即构架的重心位置.

$$\therefore d=\frac{\sum_{i=1}^{5}\Delta W_i x_i}{W}$$

$$=\frac{7\times4\times(1+2+3+4+5)}{7\times4\times5}$$

$$=3\ m$$

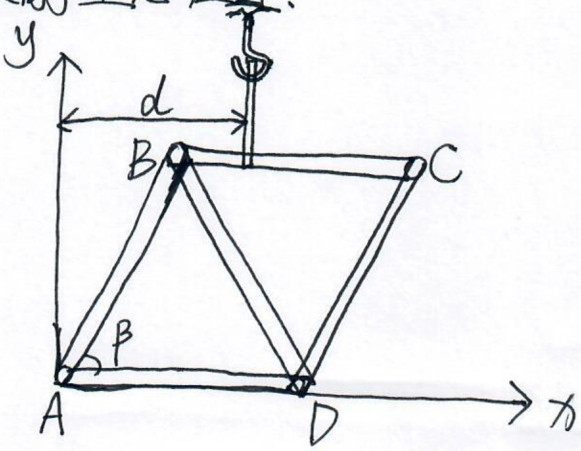
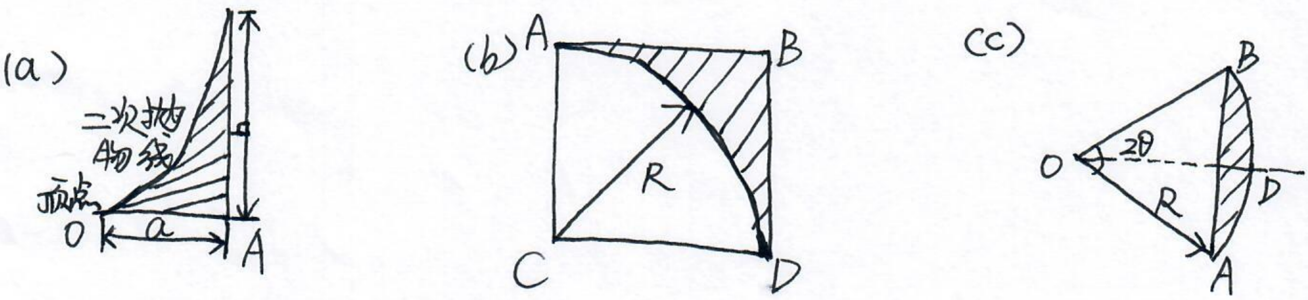


图 2-13.

2-14. 求图示均质薄板重心位置.



(a) 解：抛物线方程：$y=\frac{b}{a^2}x^2$

$$x_c=\frac{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\cdot x\,dx}{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{b}{a^2}x^4\Big|_0^a}{\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a^2}x^3\Big|_0^a}=\frac{3}{4}a$$

$$y_c=\frac{\int_0^b\left(a-\frac{a\sqrt{y}}{\sqrt{b}}\right)y\,dy}{\int_0^b\left(a-\frac{a\sqrt{y}}{\sqrt{b}}\right)dy}=\frac{a\left(\frac{y^2}{2}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^b}{a\left(y-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^b}=\frac{\frac{1}{10}ab^2}{\frac{1}{3}ab}=\frac{3}{10}b$$

$\therefore x_c=\frac{3}{4}a$. $y_c=\frac{3}{10}b$

(b) 解：
$$x_c = y_c = \frac{-\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot x\,dx + \frac{R}{2}\times R^2}{R^2-\frac{\pi}{4}R^2}$$
$$= \frac{\frac{R^3}{2} + \frac{1}{2}\int_0^R \sqrt{(R^2-x^2)}\,d(R^2-x^2)}{R^2-\frac{\pi}{4}R^2}$$
$$= \frac{\frac{R^3}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R}{R^2-\frac{\pi}{4}R^2}$$
$$= \frac{\frac{R^3}{6}}{R^2-\frac{\pi}{4}R^2}$$
$$= \frac{2R}{12-3\pi}$$

(c) 解：
$$x_c = \frac{\int_{R\cos\theta}^R 2\sqrt{R^2-x^2}\cdot x\,dx}{\theta R^2 - R^2\sin\theta\cos\theta} \Rightarrow S_{扇形} - S_{三角形}$$
$$= \frac{-\frac{2}{3}\times(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{R\cos\theta}^R}{R^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}R^3\sin^3\theta}{R^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)}$$
$$= \frac{4R\sin^3\theta}{3(2\theta-\sin2\theta)}$$

$y_c = 0.$